http://www.elearninginfo.in

29T MATH
(BENGALI)

2019

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Q. No. 1 (a–j) carries 1 mark each	1×10 = 10
Q. Nos. 2–13 carry 4 marks each	4×12 = 48
Q. Nos. 14–20 carry 6 marks each	6×7 = 42
	Total = 100

Contd.

http://www.elearninginfo.in

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

(a) Let $A = \{x : 1 < x < 10, x \text{ is an odd natural number}\}$ and

$B = \{y : 90 < y < 100, y \text{ is a prime number}\}$.

Write the number of relations from A to B. 1

ধরা হলো $A = \{x : 1 < x < 10,$ x একটি অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$ এবং

$B = \{y : 90 < y < 100,$ y একটি মৌলিক সংখ্যা$\}$ ।

A থেকে B পর্যন্ত হওয়া সম্বন্ধের সংখ্যা লেখো।

(b) Write down the range of $f(x) = cot^{-1} x$. 1

$f(x) = cot^{-1} x$ ফলনের পরিসর লেখো।

(c) Find all the positive values of 2×2 determinants whose entries are from the set $\{-1, 0, 1\}$. 1

সংহতি $\{-1, 0, 1\}$ -এর মৌলসমূহ দিয়ে গঠিত 2×2 সারণিকগুলির সকল ধনাত্মক মান নির্ণয় করো।

(d) Let A be a skew-symmetric matrix of odd order. Write the value of $|A|$. 1

ধরা হলো A একটি অযুগ্ম মাত্রার বিষম সমমিত মৌলকক্ষ। $|A|$ -এর মান লেখো।

http://www.elearninginfo.in

(e) Let A be a matrix of order 3, such that $|A| = -9$. Find the value of $|-3A^{-1}|$. 1

ধরা হলো A একটি 3 মাত্রার মৌলকক্ষ যেখানে $|A| = -9$। $|-3A^{-1}|$-এর মান নির্ণয় করো।

(f) If $2^x = 3^y$, then find $\frac{dy}{dx}$. 1

যদি $2^x = 3^y$, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

(g) Evaluate $\int 2x f'(x^2)\,dx$. 1

$\int 2x f'(x^2)\,dx$ নির্ণয় করো।

(h) Find the order and degree of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0.$$ 1

$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$ অবকল সমীকরণের ক্রম এবং ঘাত নির্ণয় করো।

(i) Write the interval in which the function $f(x) = \cos x$ is strictly decreasing. 1

$f(x) = \cos x$ ফলনটি কোন অন্তরালে সতত হ্রাসমান হয় লেখো।

http://www.elearninginfo.in

(i) Write the equation of the plane passing through (a, b, c) and parallel to xy-plane. 1

(a, b, c) বিন্দুর মধ্য দিয়ে যাওয়া এবং xy-সমতলের সমান্তরাল হওয়া সমতলটির সমীকরণ লেখো।

2. Let the mapping $f(x) = ax + b$, $a > 0$, maps $[-1, 1]$ onto $[0, 2]$; show that $\cot\left(\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18\right) = f(2)$. 4

ধরা হলো ফলন $f(x) = ax + b$, $a > 0$ এবং $[-1, 1]$-এর আচ্ছাদন প্রতিচিত্র হলো $[0, 2]$; দেখাও যে, $\cot\left(\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18\right) = f(2)$.

OR / অথবা

Find the value of

$$\cos^{-1}x + \cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}\right)\right\}, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1.$$

$\cos^{-1}x + \cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}\right)\right\}$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$-এর মান নির্ণয় করো।

3. Let $f : R \to R$ is defined by $f(x) = 3x - 2$.

and $g : R \to R$ is defined by $g(x) = \frac{x+2}{3}$.

Show that $f \cdot g = g \cdot f$. 4

http://www.elearninginfo.in

ধরা হলো $f : R \to R$ কে $f(x) = 3x - 2$ দ্বারা সংজ্ঞাবদ্ধ করা হয়েছে এবং $g : R \to R$ কে $g(x) = \frac{x+2}{3}$ দ্বারা সংজ্ঞাবদ্ধ করা হয়েছে।

দেখাও যে, $f \cdot g = g \cdot f$.

4. Show that

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$ 4

দেখাও যে,

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

OR / অথবা

Without expanding show that

$$\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x+b^{-x})^2 & (b^x-b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x+c^{-x})^2 & (c^x-c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

বিস্তার না করে দেখাও যে,

$$\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x+b^{-x})^2 & (b^x-b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x+c^{-x})^2 & (c^x-c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

http://www.elearninginfo.in

5. Show that the function f defined by

$f(x) = |1 - x + |x||$, $x \in R$ is a continuous function. 4

দেখাও যে, $f(x) = |1 - x + |x||$, $x \in R$ দ্বারা সংজ্ঞাবদ্ধ ফলন f, একটি অবিচ্ছিন্ন ফলন।

OR / অথবা

Discuss the applicability of Rolle's theorem to the function $f(x) = x^2 + 1$ on $[-2, 2]$.

ফলন $f(x) = x^2 + 1$, অন্তরাল $[-2, 2]$-তে রোলস্ উপপাদ্যের প্রয়োগ সম্পর্কে আলোচনা করো।

6. If $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, find $\frac{dy}{dx}$. 4

যদি $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

7. If $y = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-4x^3}{1+4x^3}\right)$, $x \geq 0$,

find $\frac{dy}{dx}$. 4

যদি $y = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-4x^3}{1+4x^3}\right)$, $x \geq 0$

তাহলে $\frac{dy}{dx}$ -এর মান নির্ণয় করো।

http://www.elearninginfo.in

OR / অথবা

Determine the set of all points where the function $f(x) = x|x|$ is differentiable.

ফলন $f(x) = x|x|$ অবকলনীয় হওয়ার বিন্দুসমূহের সংহতি নির্ধারণ করো।

8. Evaluate $\int \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ 4

$\int \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Evaluate $\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x}dx$.

$\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x}dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

9. Evaluate $\int_0^1 \frac{3-x^2}{(3+x^2)^2}dx$. 4

$\int_0^1 \frac{3-x^2}{(3+x^2)^2}dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

http://www.elearninginfo.in

OR / অথবা

Evaluate $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,dx$

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

10. Solve the differential equation 4

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

অবকল সমীকরণ $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ সমাধান করো।

11. If $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$,

show that $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$. 4

যদি $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$,

দেখাও যে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ ।

12. If $\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ and $\vec{b} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$ then determine the vector component of $\vec{a}$ along $\vec{b}$. 4

যদি $\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ এবং $\vec{b} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$ হয়, তাহলে $\vec{b}$ -এর দিশায় $\vec{a}$-এর ভেক্টর উপাংশ নির্ণয় করো।

http://www.elearninginfo.in

OR / অথবা

Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$, where $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ and $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$.

$\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ তাহলে $\vec{a}+\vec{b}$ এবং $\vec{a}-\vec{b}$ দুটি ভেক্টরের ওপরে লম্ব হওয়া একক ভেক্টর নির্ণয় করো।

13. A natural number is selected at random from the set $A=\{x: 1\le x\le 50\}$. Find the probability such that the number satisfies the inequation $x^2-13x\le 30$. 4

সংহতি $A=\{x: 1\le x\le 50\}$-এর থেকে যাদৃচ্ছিকভাবে একটি স্বাভাবিক সংখ্যা নির্বাচন করা হলো। সংখ্যাটির অসমতা সমীকরণ $x^2-13x\le 30$ কে সমাধান করার সম্ভাবিতা নির্ণয় করো।

14. If $A=\begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, then

show that $I+A=(I-A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

where I is the identity matrix of order 2. 6

http://www.elearninginfo.in

যদি $A=\begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, তাহলে

দেখাও যে, $I+A=(I-A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

যেখানে I একটি 2 মাত্রার একক মৌলকক্ষ।

OR / অথবা

If $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, then find A^{-1}; and hence solve the system of equations

$$x+2y-3z=-4$$
$$2x+3y+2z=2$$
$$3x-3y-4z=11$$

যদি $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, তাহলে A^{-1} নির্ণয় করো; এবং

সমীকরণ পদ্ধতি

$$x+2y-3z=-4$$
$$2x+3y+2z=2$$
$$3x-3y-4z=11$$

সমাধান করো।

http://www.elearninginfo.in

15. Form the differential equation satisfied by $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, where a and b are arbitrary constants. 6

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ সমীকরণ দ্বারা সিদ্ধ হওয়া অবকলজ সমীকরণটি গঠন করো, যেখানে a এবং b ঐচ্ছিক ধ্রুবক।

OR / অথবা

Find the maximum and minimum values of the function $f(x)=x+sin2x$ on $[0, 2\pi]$.

$[0, 2\pi]$ অন্তরালে $f(x)=x+sin2x$ ফলনের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো।

16. Prove that the area of a right angled triangle of a given hypotenuse is maximum when the triangle is isosceles. 6

প্রমাণ করো যে, প্রদত্ত অতিভুজ বিশিষ্ট একটি সমকোণী ত্রিভুজের কালি সর্বোচ্চ হবে যখন ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হবে।

OR / অথবা

Find the area of the smaller portion enclosed by the curves $x^2+y^2=9$ and $y^2=8x$.

$x^2+y^2=9$ এবং $y^2=8x$ বক্র দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষুদ্র অংশের কালি নির্ণয় করো।

http://www.elearninginfo.in

17. Find the shortest distance between the lines

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

and $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$. 6

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ এবং $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ রেখা দুটির মাঝের সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Find the equations of two lines through the origin which intersect the line $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ at $\frac{\pi}{3}$.

মূলবিন্দুর মধ্য দিয়ে পার হয়ে যাওয়া $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ রেখাটিকে $\frac{\pi}{3}$ কোণে ছেদ করা রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

18. Prove that $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$. Hence find the area of the parallelogram whose diagonals are the vectors

$3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$. 6

http://www.elearninginfo.in

প্রমাণ করো যে $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$। সুতরাং ভেক্টর $3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ কর্ণ বিশিষ্ট সমান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Find the vector equation of the line passing through $(1, 2, 3)$ and parallel to the planes $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ and $\vec{r}.(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$.

$(1, 2, 3)$ বিন্দুর মধ্য দিয়ে পার হয়ে যাওয়া $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ এবং $\vec{r}.(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ সমতলের সমান্তরাল রেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

19. Solve the linear programming problem graphically. 6

লৈখিক নিয়ম দ্বারা নীচের রৈখিক প্রগ্রেমিং সমস্যাটির সমাধান বের করো।

Maximize $z=20x+15y$, subject to the conditions

$2x+y\le 200$,
$x+y\le 150$ and $x\ge 0,\ y\ge 0$.

$z=20x+15y$-এর সর্বোচ্চ মান বের করো

যেখানে,

$2x+y\le 200$,
$x+y\le 150$ এবং $x\ge 0,\ y\ge 0$।

http://www.elearninginfo.in

OR / অথবা

Maximize and minimize

$z = 5x + 2y$, subject to the conditions,

$$x - 2y \leq 2,$$
$$3x + 2y \leq 12,$$
$$-3x + 2y \leq 3 \quad \text{and} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$z = 5x + 2y$-এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান বের করো

যেখানে

$$x - 2y \leq 2,$$
$$3x + 2y \leq 12,$$
$$-3x + 2y \leq 3 \quad \text{এবং} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \text{ ।}$$

20. Two numbers are selected at random from a set of first 90 natural numbers. Find the probability that the product of randomly selected numbers is divisible by 3. 6

প্রথম 90টি স্বাভাবিক সংখ্যা থেকে 2টি সংখ্যা যাদৃচ্ছিকভাবে নির্বাচন করা হলো। যাদৃচ্ছিকভাবে নির্বাচন করা সংখ্যা দুটির গুণফল 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবিতা নির্ণয় করো।

OR / অথবা

In a 3×3 matrix, entries a_{ij} are selected randomly from the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 with replacement where each element a_{ij} is a three digit number. Find the probability that each element in each row is divisible by 15.

http://www.elearninginfo.in

একটি 3×3 মাত্রার মৌলকক্ষের মৌলসমূহ a_{ij} কে অংক 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 থেকে পুনঃস্থাপিত হিসাবে যাদৃচ্ছিকভাবে নির্বাচন করা হয়েছে, যেখানে প্রত্যেক a_{ij} একটি তিন অংক বিশিষ্ট সংখ্যা। প্রতিটি সারির প্রতিটি মৌল 15 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবিতা নির্ণয় করো।

———— × ————