



28T MATH
(BENGALI)

2018

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Q. No. 1 (a-j) carries 1 mark each

$$1 \times 10 = 10$$

Q. Nos. 2-12 carry 4 marks each

[Q. No. 7 has two parts; 7 (i), (ii)]

$$4 \times 12 = 48$$

Q. Nos. 13-19 carry 6 marks each

$$6 \times 7 = 42$$

$$\text{Total} = 100$$

Contd.



1. Answer the following questions :

নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

(a) If $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = x^2 - 3x + 2$, find $f(f(x))$. 1

যদি ফলন $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এর সংজ্ঞা এভাবে দেওয়া হয় $f(x) = x^2 - 3x + 2$, তাহলে $f(f(x))$ নির্ণয় করো।

(b) What is the domain of the function $\operatorname{cosec}^{-1}$? 1

ফলন $\operatorname{cosec}^{-1}$ এর আদিক্ষেত্র কী হবে?

(c) Find X , If $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ and $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. 1

যদি $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ও $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে X মৌলকক্ষটি নির্ণয় করো।

(d) Let $|A| = k$. If B is the matrix obtained by interchanging two rows of A then $|B| = ?$ 1

ধরা যাক $|A| = k$ ও B মৌলকক্ষটি A র দুটি লাইন অদলবদল করে পাওয়া যায়, তাহলে $|B| = ?$



(e) Find $\text{adj } A$ when $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

1

$\text{adj } A$ নির্ণয় করো, যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(f) Which one of the following is true? For the real function

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x \leq 1 \\ x-2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

1

(i) f is continuous at all real numbers $x > 1$ and $x < 1$

(ii) f is continuous at all real numbers $x \geq 1$

(iii) f is continuous at all real numbers $x \leq 1$

(iv) f is continuous at $x = 1$.

একটি বাস্তব ফলনের সংজ্ঞা এইভাবে দেওয়া আছে,

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{যদি } x \leq 1 \\ x-2 & \text{যদি } x > 1 \end{cases}$$

নিচের কোন উক্তিটি শুদ্ধ ?

(i) f ফলন প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা $x > 1$ ও $x < 1$ -এর জন্য অবিচ্ছিন্ন

(ii) f ফলন সমস্ত বাস্তব সংখ্যা $x \geq 1$ -এর জন্য অবিচ্ছিন্ন

(iii) f ফলন সমস্ত বাস্তব সংখ্যা $x \leq 1$ -এর জন্য অবিচ্ছিন্ন

(iv) f ফলন $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

- (g) What are the order and degree of the differential equation

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 ?$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 \text{ অবকল সমীকরণের ক্রম ও ঘাত লেখো।}$$

- (h) Find the unit vector in the direction of the vector $\vec{a} + \vec{b}$ where

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \text{ and } \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

ভেক্টর $\vec{a} + \vec{b}$ -এর দিকে একক ভেক্টর কী যেখানে $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ও

$$\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

- (i) What is the vector equation of the line passing through the points $(-1, 0, 2)$ and $(3, 4, 6)$?

$(-1, 0, 2)$ ও $(3, 4, 6)$ দুটি বিন্দু দিয়ে যাওয়া রেখাটির ভেক্টর সমীকরণ কী হবে ?

- (j) What are the direction cosines of the normal to the plane $z = 2$?

$z = 2$ সমতলে অভিলম্বের দিশাকগুলি কী হবে?

Let L be the set of all lines in XY -plane and R be the relation in L defined as

$$R = \{(l_1, l_2) : l_1 \text{ is parallel to } l_2\}.$$

Show that R is an equivalence relation. Find the set of all lines related to the line $y = 2x + 4$. 3+1=4

ধরা হল L , XY সমতলে থাকা সমস্ত রেখার সংহতি। L -সংহতিতে

$$R = \{(l_1, l_2) : l_1 \text{ ও } l_2 \text{ সমান্তরাল}\}। \text{ দেখাও যে } R \text{ একটি সমতুল্য সম্পর্ক।}$$

$y = 2x + 4$ রেখার সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত সমস্ত রেখাগুলির সংহতি নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Show that $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, given by $f(x) = \frac{x}{x+2}$ is one-one. Find

the inverse of the function $f : [-1, 1] \rightarrow \text{Range } f$. 2+2=4

দেখাও যে $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = \frac{x}{x+2}$ একটা একৈকী ফলন।

ফলন $f : [-1, 1] \rightarrow \text{Range } f$ -এর বিপরীত ফলন নির্ণয় করো।

3. Prove that 4

প্রমাণ করো যে

$$\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$$



OR / অথবা

Show that

দেখাও যে

$$\sin^{-1} \frac{12}{13} + \cos^{-1} \frac{4}{5} + \tan^{-1} \frac{63}{13} = \pi$$

4. Express the following matrix as a sum of a symmetric and skew-symmetric matrix.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

নিচে দেওয়া মৌলকক্ষটিকে একটি প্রতিসাম্য ও একটি বিপ্রতিসাম্য মৌলকক্ষের যোগফল হিসাবে দেখাও।

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

OR / অথবা

If $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ then prove that $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$ where n is any positive integer.

যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে প্রমাণ করো যে, $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$ যেখানে n

একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

5. If $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4

যদি $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ হয়, তাহলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করো।

OR / অথবা

If $y = (\tan^{-1} x)^2$, show that $(1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2) \frac{dy}{dx} - 2 = 0$.

4

যদি $y = (\tan^{-1} x)^2$ হয়, দেখাও যে, $(1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2) \frac{dy}{dx} - 2 = 0$.

6. State Mean value theorem and verify it for the following function :
 $f(x) = x^2$ for $x \in [2, 4]$. 1+3=4

মধ্যমান উপপাদ্যটি বিবৃত করো এবং নীচের ফলনটির ক্ষেত্রে উপপাদ্যটির সত্যতা পরীক্ষা করো :

$f(x) = x^2$, যেখানে $x \in [2, 4]$ ।

OR / অথবা

Find the equation of all lines having slope 2 and being tangent to the curve $y + \frac{2}{x-3} = 0$.

4

$y + \frac{2}{x-3} = 0$ বক্রের স্পর্শক ও প্রবণতা 2 হওয়া সমস্ত রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।



7. Evaluate the following integrals :

নিচের অনুকলগুলির মান নির্ণয় করো :

(i) $\int x(\log x)^2 dx$ 4

OR / অথবা

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+2)}$$
 4

(ii) $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$ 4

OR / অথবা

$$\int_{-1}^2 |x^3 - x| dx$$
 4

8. Form the differential equation of the family of circles touching the y -axis at origin. 4

y অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করা বৃত্ত পরিবারের অবকল সমীকরণ গঠন করো।

OR / অথবা

Solve the differential equation $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$. 4

$\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$ অবকল সমীকরণটির সমাধান করো।



Solve the differential equation :

4

$$(x dy - y dx) y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y dx + x dy) x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

নিচের অবকল সমীকরণটির সমাধান করো :

$$(x dy - y dx) y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y dx + x dy) x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

0. Find the area of the triangle with vertices (1, 1, 2), (2, 3, 5) and (1, 5, 5).

4

একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি (1, 1, 2), (2, 3, 5) ও (1, 5, 5) হলে, ত্রিভুজটির কালি নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Prove that $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, if and only if \vec{a}, \vec{b} are perpendicular, given $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

4

প্রমাণ করো যে, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ যদি এবং কেবল যদি \vec{a} ও \vec{b} পরস্পর লম্ব হয়, যেখানে $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$.



11. Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \quad \text{and}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}).$$

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \quad \text{ও}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

রেখাদুটির মধ্যে নিম্নতম দূরত্ব নির্ণয় করো।

OR/ অথবা

Find the direction cosines of the unit vector perpendicular to the plane $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ and passing through the origin. 4

মূলবিন্দু দিয়ে যাওয়া এবং $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ সমতলের অভিলম্বের দিকে একক ভেক্টরের দিশাক্ষগুলো নির্ণয় করো।

12. A die is thrown twice and the sum of the numbers appearing is observed to be 6. What is the conditional probability that the number 4 has appeared at least once ? 4

একটি লুডোর গুটি দুবার নিক্ষেপ করা হল ও প্রাপ্ত সংখ্যা দুটির যোগফল পাওয়া গেল 6। কমপক্ষেও একবার 4 সংখ্যাটি পাবার শর্ত সাপেক্ষ সম্ভাবিতা নির্ণয় করো।

OR/ অথবা

Bag I contains 3 red and 4 black balls while another Bag II contains 5 red and 6 black balls. One ball is drawn at random from one of the bags and it is found to be red. Find the probability that it was drawn from Bag II. 4

প্রথম থলিতে 3টি লাল এবং 4টি কালো বল আছে ও দ্বিতীয় থলিতে 5টি লাল ও 6টি কালো বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাবে একটি বল যেকোনো একটি থলি থেকে নেওয়া হল এবং একটি লাল বল পাওয়া গেল। বলটি দ্বিতীয় থলিটি থেকে পাবার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।



13. Solve the following system of equations by matrix method : 6

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

নিম্নের প্রদত্ত সরল সহসমীকরণগুলো মৌলিক পদ্ধতিতে সমাধান করো :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

OR / অথবা

Show that

6

দেখাও যে

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & y+z \\ y & y^2 & z+x \\ z & z^2 & x+y \end{vmatrix} = (y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$$

14. Find the intervals in which the function

$$f(x) = \sin 3x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ is}$$

3+3=6

(i) increasing

(ii) decreasing.

কী অন্তরালে $f(x) = \sin 3x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ফলনটি

(i) বর্ধমান হবে?

(ii) হ্রাসমান হবে?



OR / অথবা

Find the maximum and minimum values, if any, of the following function : 6

$$f(x) = \sin x - \cos x, 0 < x < 2\pi$$

নিচের ফলনটির গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমান, যদি থাকে, নির্ণয় করো :

$$f(x) = \sin x - \cos x, 0 < x < 2\pi$$

15. Evaluate $\int_1^4 (x^2 - x) dx$ as the limit of a sum. 6

$\int_1^4 (x^2 - x) dx$ কে একটি যোগফলের সীমা হিসাবে প্রকাশ করে মান নির্ণয় করো।

16. Find the area of the region enclosed by the parabola $x^2 = y$, the line $y = x + 2$ and x -axis. 6

অধিবৃত্ত $x^2 = y$, রেখা $y = x + 2$ এবং x -অক্ষ দ্বারা আবৃত ক্ষেত্রটির কালি নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Find the area of the region enclosed between the two circles :

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ and } (x - 2)^2 + y^2 = 4.$$

6



$x^2 + y^2 = 4$ ও $(x-2)^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত দুটি দ্বারা আবৃত ক্ষেত্রের কালি নির্ণয় করো।

17. Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ and the point $(2,1,3)$. 6

$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$ ও $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ সমতলদ্বয়ের দ্বারা ছেদিত ও $(2,1,3)$ বিন্দু দিয়ে যাওয়া সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Find the equation of the plane which contains the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$, $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ and is perpendicular to the plane $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$. 6

$\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$ ও $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ সমতলদ্বয়ের দ্বারা ছেদিত রেখা

দিয়ে যাওয়া ও $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$ সমতলের লম্বভাবে থাকা সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।



18. Solve the Linear Programming Problem graphically :
রেখাচিত্রের (graph) সাহায্যে নিচের রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটির সমাধান করো।

Maximize and Minimize $z = 6x + 3y$

subject to $4x + y \geq 80$
 $x + 5y \geq 115$
 $3x + 2y \leq 150$
 $x \geq 0, y \geq 0.$

6

$z = 6x + 3y$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো

যেখানে $4x + y \geq 80$
 $x + 5y \geq 115$
 $3x + 2y \leq 150$
 $x \geq 0, y \geq 0.$

OR / অথবা

Maximize and Minimize $z = 800x + 1200y$

subject to $3x + 4y \leq 60$
 $x + 3y \leq 30$
 $x \geq 0, y \geq 0.$

6

$z = 800x + 1200y$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো

যেখানে

$3x + 4y \leq 60$
 $x + 3y \leq 30$
 $x \geq 0, y \geq 0.$



Find the variance of the number obtained on a throw of an unbiased die. 6

অপক্ষপাতী একটি লুডোর গুটি নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত সংখ্যার প্রসরণ নির্ণয় করো।

OR / অথবা

A and B throw a die alternatively till one of them gets a '6' and wins the game. Find their respective probabilities of winning, if A starts first. 6

A ও B একটি লুডোর গুটি 6 না পাওয়া পর্যন্ত এবং খেলাটি না জেতা পর্যন্ত একজনের পর অপরজন নিক্ষেপ করে থাকে। যদি খেলাটি প্রথমে A আরম্ভ করে তাহলে তাদের উভয়ের জেতার যথাক্রমিক সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

— x —